به نامِ خدا

مسئله‌یِ ۱) رویِ یک شبکه‌یِ یک‌بعدی‌یِ دوره‌ای با $2N$ جای‌گاه، $(N \gg 1)$، که رویِ هر جای‌گاه دو حالتِ $S = \pm 1$ قرار دارند، ضریبِ جفتش یک‌درمیان تغییرِ می‌کند

$$H = -J_1 \sum_k S_{2k} S_{2k+1} - J_2 \sum_k S_{2k+1} S_{2k+2}$$

الف ــ ماتریس انتقال و تابعِ پارش را به دست آورید.

ب ــ انرژی‌یِ متوسطِ دستگاه را به دست آورید.

ج ــ $\langle S_{2k} S_{2k+1} \rangle$، $\langle S_{2k+1} S_{2k+2} \rangle$، و $\langle S_{2k} S_{2k+2} \rangle$ را به دست آورید.

حلِ مسئله‌یِ ۱) الف ــ در درس برایِ ضریبِ جفتشِ دل‌خواه و غیرِ یک‌نواخت تابعِ پارش را به دست آوردیم

$$\boldsymbol{T}^{(J_k)} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\beta J_k} & \mathrm{e}^{-\beta J_k} \\ \mathrm{e}^{-\beta J_k} & \mathrm{e}^{\beta J_k} \end{pmatrix}. \tag{۱}$$

با توجه به این‌که نیمی از ضرایبِ جفتش J_1، نیمی دیگر J_2، و با استفاده از (۳,۵۹) درس‌نامه، می‌رسیم به

$$Z = 2^N \cosh^{N/2}(\beta J_1) \cosh^{N/2}(\beta J_2). \tag{۲}$$

ب ــ تابعِ پارش در حدِ ترمودینامیکی عبارت است از

$$\ln Z = N \ln 2 + \frac{N}{2} \left(\ln \cosh(\beta J_1) + \ln \cosh(\beta J_2) \right) \tag{۳}$$

انرژی‌یِ میان‌گین در حدِ ترمودینامیکی عبارت است از

$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\frac{N}{2} \left(J_1 \tanh(\beta J_1) + J_2 \tanh(\beta J_2) \right). \tag{۴}$$

ج ــ با استفاده از (۳,۶۰) و (۳,۶۱) نتیجه می‌شود

$$\langle S_{2k} S_{2k+1} \rangle = \tanh(\beta J_1), \tag{۵}$$

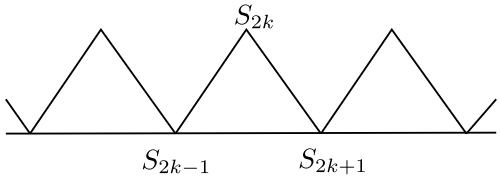
$$\langle S_{2k+1} S_{2k+2} \rangle = \tanh(\beta J_2), \tag{۶}$$

$$\langle S_{2k} S_{2k+2} \rangle = \tanh(\beta J_1) \tanh(\beta J_2). \tag{۷}$$

مسئله‌ی ۲) مدل آیزینگ از $2N$ ذره با دو حالتِ $S = \pm 1$ رویِ یک شبکه‌ای دوره‌ای به طوری که جای‌گاهِ $2N+1$ همان جای‌گاهِ 1 است را مطابقِ شکلِ زیر و با همیلتونی‌یِ

$$H = -J\sum_k (S_{2k-1}S_{2k} + S_{2k}S_{2k+1} + S_{2k-1}S_{2k+1}) - B\sum_k S_k$$

در نظر بگیرید. ضریبِ جفت‌شدگی بین هر دو جای‌گاه را J، میدانِ مغناطیسی B، دما T و $N \gg 1$ بگیرید.



الف‌ـ ماتریس انتقال را به دست آورید.

ب‌ـ در حدِ میدانِ مغناطیسی‌یِ خیلی ضعیف، $\beta B \ll 1$ و با استفاده از تقریبِ $\mathrm{e}^{\epsilon} \approx 1 + \epsilon$، تابعِ پارش را تا مرتبه‌یِ یکِ βB محاسبه کنید.

ج‌ـ در حدِ میدانِ مغناطیسی‌یِ خیلی قوی، $\beta B \gg 1$، تابعِ پارش را محاسبه کنید. برایِ این کار بزرگ‌ترین توانِ $\mathrm{e}^{\beta B}$ را نگه دارید.

د‌ـ انرژی‌یِ متوسطِ دستگاه در این دو حد را به دست آورید.

حلِ مسئله‌یِ ۲) الف‌ـ در حضورِ میدانِ مغناطیسی همیلتونی تغییر کرده است ولی هنوز می‌توانیم از همان روشِ بندهایی که قبلاً آموختیم، استفاده کنیم.

$$\begin{aligned} Z &= \sum \mathrm{e}^{-\beta H} \\ &= \sum_{\{S_i\}} \mathrm{e}^{\beta[J\sum_k (S_{2k-1}S_{2k}+S_{2k}S_{2k+1}+S_{2k-1}S_{2k+1})+B\sum_k S_k]} \\ &= \sum_{\{S_i\}} \mathrm{e}^{\beta\left(\sum_k J[S_{2k}(S_{2k-1}+S_{2k+1})+S_{2k-1}S_{2k+1}]+\frac{B}{2}(S_{2k-1}+S_{2k+1})+BS_{2k}\right)} \\ &= \sum_{\{S_{2k+1}\}} T_{S_1S_3}T_{S_3S_5}\cdots \end{aligned} \qquad (۸)$$

در رابطه‌یِ آخر روی اسپینِ جای‌گاه‌هایِ زوج جمع بسته‌ایم

$$\begin{aligned} T_{S_{2k-1},S_{2k+1}} &= \mathrm{e}^{\beta J[(S_{2k-1}+S_{2k+1})+S_{2k-1}S_{2k+1}]+\beta B[1+(S_{2k-1}+S_{2k+1})/2]} \\ &+ \mathrm{e}^{\beta J[-(S_{2k-1}+S_{2k+1})+S_{2k-1}S_{2k+1}]+\beta B[-1+(S_{2k-1}+S_{2k+1})/2]} \end{aligned} \qquad (۹)$$

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3\beta J+2\beta B} + \mathrm{e}^{-\beta J} & \mathrm{e}^{-\beta J}(\mathrm{e}^{\beta B} + \mathrm{e}^{-\beta B}) \\ \mathrm{e}^{-\beta J}(\mathrm{e}^{\beta B} + \mathrm{e}^{-\beta B}) & \mathrm{e}^{-\beta J} + \mathrm{e}^{3\beta J-2\beta B} \end{pmatrix}. \tag{۱۰}$$

ب_ در حدِ میدانِ مغناطیسی‌یِ خیلی ضعیف، و با استفاده از تقریبِ $\mathrm{e}^{\epsilon} \approx 1 + \epsilon$، ماتریسِ انتقال تبدیل می‌شود به

$$\boldsymbol{T} \approx \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3\beta J}(1 + 2\beta B) + \mathrm{e}^{-\beta J} & 2\mathrm{e}^{-\beta J} \\ 2\mathrm{e}^{-\beta J} & \mathrm{e}^{-\beta J} + \mathrm{e}^{3\beta J}(1 - 2\beta B) \end{pmatrix}. \tag{۱۱}$$

دترمینان و ردِ این ماتریس عوض نمی‌شود. بنا بر این تا مرتبه‌یِ اولِ βB ویژه‌مقادیرِ $\boldsymbol{T}$ در نتیجه تابعِ پارش و انرژی‌یِ متوسطِ دستگاه تغییر نمی‌کنند.

ج_ در حدِ میدانِ مغناطیسی‌یِ خیلی قوی، $\beta B \gg 1$، و با نگه‌داشتنِ بزرگ‌ترین توانِ $\mathrm{e}^{\beta B}$ در ماتریسِ انتقال، $\boldsymbol{T}$ تبدیل می‌شود به

$$\boldsymbol{T} \approx \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3\beta J+2\beta B} & \mathrm{e}^{-\beta J+\beta B} \\ \mathrm{e}^{-\beta J+\beta B} & \mathrm{e}^{-\beta J} \end{pmatrix}. \tag{۱۲}$$

ویژه‌مقدارِ بزرگ‌تر $\lambda_{\max} \approx \mathrm{e}^{\beta(3J+2B)}$ است. تابعِ پارش در حدِ ترمودینامیکی عبارت است از

$$\ln Z \approx N \ln \lambda_1 = N \ln[\mathrm{e}^{\beta(3J+2B)}] \approx 2N\beta B \tag{۱۳}$$

انرژی‌یِ میانگین در حدِ ترمودینامیکی عبارت است از

$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \approx 2NB. \tag{۱۴}$$